

page 3

Si m_G et m_I sont différents, alors le rapport m_G/m_I pourrait être différent d'un objet à l'autre, ce qui implique que ces objets seraient soumis à des accélérations différentes, dans le même champ gravitationnel. C'est quelque chose que l'on peut tester expérimentalement.

Galilée et Newton ont fourni des premières indications de l'égalité entre m_G et m_I (avec une précision d'un pour mille environ) au XVII^e siècle, ce qui a satisfait la communauté scientifique pendant longtemps. Toutefois, la situation a de nouveau intéressé les

page 6

de fréquence, comme nous allons maintenant le montrer.

D'après le principe d'équivalence, ce qu'on observe dans un référentiel au repos par rapport à la surface de la Terre doit être identique à ce qu'on observe dans une cabine accélérée, dans l'espace profond. Supposons que cette cabine se trouve être immobile par rapport à un référentiel inertiel à l'instant $t = 0$, auquel un photon est émis par le plafond de la cabine du référentiel accéléré (voir la figure 1.3). Dans le référentiel inertiel, la fréquence de ce photon reste constante. Mais pendant le temps t' que met le photon pour atteindre le détecteur situé au sol de la cabine accélérée, ce dernier a acquis une

page 9

P1.1 Ce problème revient sur les affirmations faites dans la figure 1.2.

- a. Montrez que les valeurs de h et t pour les trajectoires de la balle de fusil et du ballon représentées sur cette figure sont en accord avec l'accélération gravitationnelle $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

page 17

Fig. 2.3 – Diagramme d'espace-temps montrant le cône de lumière associé à l'événement E . On remarque que l'événement A se situe hors du cône de lumière de E , si bien qu'il est causalement déconnecté de E . En revanche, les événements L et F peuvent être causés par E . Les lignes d'univers qui passent par E doivent rester à l'intérieur de son cône de lumière.

page 22

reproduite en entier page suivante (figure manquante)

page 37

La quadri-vitesse peut donc s'écrire

$$\begin{pmatrix} u^t \\ u^x \\ u^y \\ u^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{3}{8}v^4 + \dots \\ v_x(1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{3}{8}v^4 + \dots) \\ v_y(1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{3}{8}v^4 + \dots) \\ v_z(1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{3}{8}v^4 + \dots) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

page 62

Vérifions l'équation 5.16 pour $\alpha = \beta = t$.

$$\begin{aligned} \eta'_{tt} &= (\Lambda^{-1})^{\mu}_t (\Lambda^{-1})^{\nu}_t \eta_{\mu\nu} \\ &= (\Lambda^{-1})^t_t (\Lambda^{-1})^{\nu}_t \eta_{t\nu} + (\Lambda^{-1})^x_t (\Lambda^{-1})^{\nu}_t \eta_{x\nu} \\ &\quad + (\Lambda^{-1})^y_t (\Lambda^{-1})^{\nu}_t \eta_{y\nu} + (\Lambda^{-1})^z_t (\Lambda^{-1})^{\nu}_t \eta_{z\nu} \end{aligned} \quad (5.29)$$

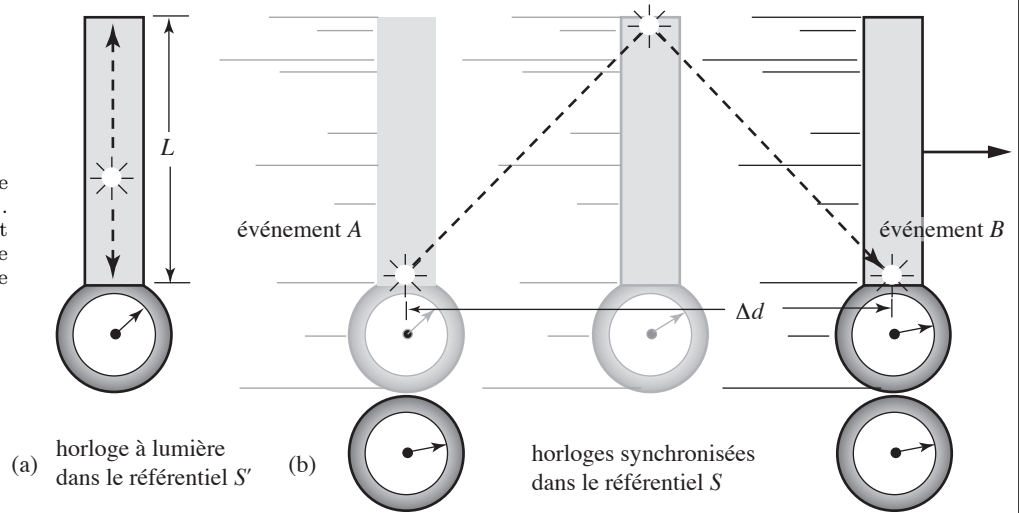
page 79

Généralisation de l'équation 7.2. L'équation 7.5 fournit une équation explicitement covariante qui relie un tenseur de champ $F^{\mu\nu}$ au quadri-courant J^{μ} qui crée ce champ. Mais que représentent physiquement toutes les autres composantes de $F^{\mu\nu}$? L'équation 7.2 décrit les effets physiques des composantes du champ électrique, et en la généralisant aussi nous pourrions mieux comprendre ce que signifient ces autres composantes.

La généralisation évidente de $d\vec{p}/dt$ dans le membre de droite est $dp^{\mu}/d\tau$, où p^{μ} désigne la quadri-quantité de mouvement de la particule-test et τ le temps propre le

Encadré 2.3 (suite) : Une démonstration de la transformation de Lorentz

Fig. 2.5 – (a) Une horloge à lumière vue depuis son référentiel au repos S' . (b) La même horloge (avec le trajet en zigzag de la lumière) vue depuis le référentiel S dans lequel l'horloge se déplace à la vitesse β .



Une **horloge à lumière** est un type d'horloge qui utilise des éclairs lumineux se réfléchissant entre deux miroirs pour mesurer le passage du temps (voir la figure 2.5a). Comme la vitesse de la lumière est égale à 1 dans le référentiel de l'horloge, celle-ci fonctionne correctement si elle indique une augmentation de $2L$ après chaque aller-retour de la lumière, où L désigne la distance entre les miroirs.

Imaginez maintenant que cette horloge (avec tout le référentiel S') se déplace à la vitesse β par rapport à un référentiel S , comme l'illustre la figure 2.5b. Soit A et B les événements successifs correspondant au moment où la lumière atteint le miroir du bas. Pendant le temps Δt mesuré dans S , l'horloge parcourt une distance $\Delta d = \beta \Delta t$. Comme la vitesse de la lumière vaut aussi 1 dans le référentiel S , Δt doit être le temps mis par la lumière pour parcourir la trajectoire en zigzag montrée sur la figure 2.5b, ce temps étant directement donné en mètres par la distance parcourue. D'après le théorème de Pythagore, cette distance s'écrit simplement

$$\Delta t = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{1}{2}\Delta d\right)^2} = \sqrt{(2L)^2 + \Delta d^2} = \sqrt{(\Delta t')^2 + \Delta d^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t'^2 = \Delta t^2 - \Delta d^2 = \Delta t^2 - (\beta \Delta t)^2 \Rightarrow \Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} \quad (2.11)$$

Transformation de Lorentz inverse. Considérons maintenant le diagramme d'espace-temps montré sur la figure 2.6. La ligne d'univers qui joint l'événement O à l'événement F est celle que suit une horloge Q au repos en $x' = 0$ dans le référentiel S' : l'événement O est défini par $t = 0$ et $x = 0$ dans les deux référentiels. E est un événement arbitraire et les lignes pointillées sont les lignes d'univers de deux éclairs lumineux (qui n'ont rien à voir avec l'éclair montré dans la figure 2.5) : un des éclairs est émis vers la droite par l'horloge Q à l'événement D pour aller vers E , l'autre est émis vers la gauche depuis E , pour retourner à l'horloge à l'événement F .

L'horloge Q est située en $x' = 0$ par définition, et les événements D et F se produisent en $x'_D = x'_F = 0$ dans le référentiel S' . Comme l'horloge Q se déplace (en même temps que S') à la vitesse β dans la direction $+x$ dans S , en démarrant en $x = 0$ à $t = 0$, on a $x_D = \beta t_D$ et $x_F = \beta t_F$. Finalement, puisque l'horloge Q est présente aux événements O et D , on peut appliquer l'équation 2.11 et on sait donc que $t'_D = t_D \sqrt{1 - \beta^2}$, ce qui implique que $t_D = \gamma t'_D$ où $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$. De même, $t_F = \gamma t'_F$. Finalement,

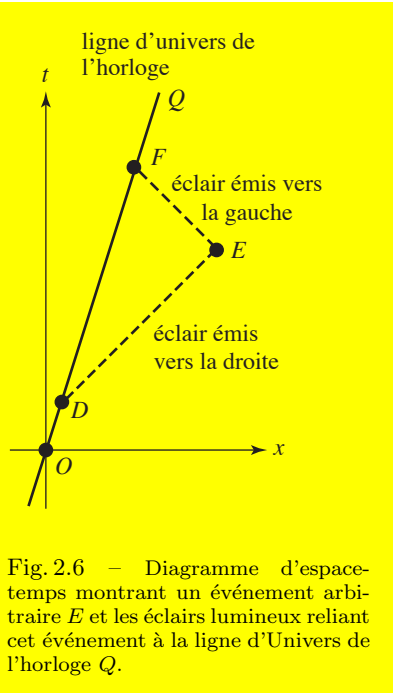


Fig. 2.6 – Diagramme d'espace-temps montrant un événement arbitraire E et les éclairs lumineux reliant cet événement à la ligne d'Univers de l'horloge Q .

page 118

L'équation newtonienne correspondante, obtenue en prenant la dérivée par rapport à t des deux côtés de l'équation 10.10, s'écrit

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^3} \quad (\text{Newton}) \quad (10.14)$$

page 122

où E désigne l'énergie newtonienne totale de l'objet, m sa masse, M la masse du corps attracteur à l'origine, v_r la composante radiale de la vitesse du corps et v_ϕ la composante de la vitesse perpendiculaire à la composante radiale et qui pointe dans la direction où ϕ augmente. Le moment cinétique du corps par rapport à l'origine vaut

$$L = mrv_\phi = mr^2 \frac{d\phi}{dt}, \quad \text{et donc} \quad \ell \equiv \frac{L}{m} = r^2 \frac{d\phi}{dt} \quad (10.24)$$

page 135

Exercice 11.1.1 : Remplacez le résultat de l'équation 11.5 dans l'équation 11.4 et prenez la dérivée par rapport à ϕ pour obtenir l'équation 11.6. Les équations sont réécrites ci-dessous pour faciliter l'exercice.

page 150

Considérons la relation $\mathbf{o}_t \cdot \mathbf{o}_t = \eta_{tt} = -1$. Si l'observateur est au repos en coordonnées de Schwarzschild, alors les composantes spatiales de $\mathbf{o}_t = \mathbf{u}_{\text{obs}}$ doivent être nulles. On a donc

$$\begin{aligned} -1 &= \mathbf{o}_t \cdot \mathbf{o}_t = g_{\mu\nu} (\mathbf{o}_t)^\mu (\mathbf{o}_t)^\nu = g_{tt} (\mathbf{o}_t)^t (\mathbf{o}_t)^t \\ \Rightarrow (\mathbf{o}_t)^t &= \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2GM/r}} \end{aligned} \quad (12.24)$$

page 160

Exercice 13.2.1 : Montrez que $dr/dt = -(du/d\phi)b(1 - 2GMu)$ (équation 13.2) et

$$1 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \quad (\text{d'après l'équation 13.1})$$

entraînent que $(du/d\phi)^2 + u^2 = (1/b^2) + 2GMu^3$ (équation 13.3).

page 201

Dérivée covariante d'un tenseur général. Vous pouvez montrer (voir l'encadré 17.2) que la dérivée covariante d'un covecteur B_μ doit s'écrire

$$\nabla_\alpha B_\mu = \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu B_\nu \quad (17.7)$$

page 208

Exercice 17.7.1 : Compter les 20 façons distinctes de distribuer des valeurs parmi trois possibilités revient à distribuer les nombres 0, 1, 2 et 3 dans trois cases de manière à ce qu'aucune combinaison ne soit une permutation des autres. Par exemple, 000 est unique, 001 est unique, 010 est une permutation du second, etc. Faire la liste des 20 combinaisons de ce type. Indication : commencez par les combinaisons dont les trois nombres sont égaux, puis celles où deux sont égaux, puis celles où aucun ne sont égaux.

page 236

Si notre fluide se déplace lentement dans ce référentiel localement inertiel, alors v^2 devient négligeable devant 1 et la quadri-vitesse du fluide s'écrit approximativement $u^\mu \approx [1, v_x, v_y, v_z]$. On peut alors ignorer la distinction entre la densité d'énergie et la pression ρ_0 et p_0 du fluide dans le référentiel au repos, et les quantités correspondantes ρ et p mesurées dans le référentiel localement inertiel. Si de plus les mouvements thermiques aléatoires des particules dans le fluide sont non relativistes, alors la pression $p \ll \rho$. Dans cette limite, l'équation 20.17 devient

page 240

Multipliez les deux côtés de l'équation 20.29 par u_ν , summez sur ν puis utilisez la relation $-1 = u^\nu u_\nu$ et l'équation 20.30 pour simplifier le résultat. Vous devriez obtenir l'équation 20.17 :

$$\partial_\mu(\rho_0 u^\mu) + p_0 \partial_\mu u^\mu = 0 \quad (\text{équation de continuité}) \quad (20.17r)$$

page 285

Matière noire. Depuis les années 1930, on a suspecté que l'Univers contenait plus de matière que ce qu'on voyait et ceci a depuis été confirmé par un grand nombre d'observations au cours des dernières décennies (l'**encadré 24.6** présente plusieurs d'entre elles). Toutefois, comme nous le verrons dans un chapitre ultérieur, l'étude de la physique de l'Univers primordial permet de placer une limite supérieure solide à la quantité de matière qui peut être « baryonique », c'est-à-dire constituée de quarks et de leptons, et la quantité de matière noire que l'on détecte grâce à ses effets gravitationnels est plusieurs fois supérieure à cette limite. On ne sait à peu près rien de ce dont peut être constitué le reste de la matière noire. Une des hypothèses favorites aujourd'hui est qu'elle pourrait être formée de « wimps » (« weakly interacting massive particles », qui signifie « particules massives interagissant **faiblement** »), des particules qui émergent dans certaines généralisations du modèle standard de la physique des particules. Les modèles