Encadré 2.3 (suite) : **Une démonstration de la transformation de Lorentz**

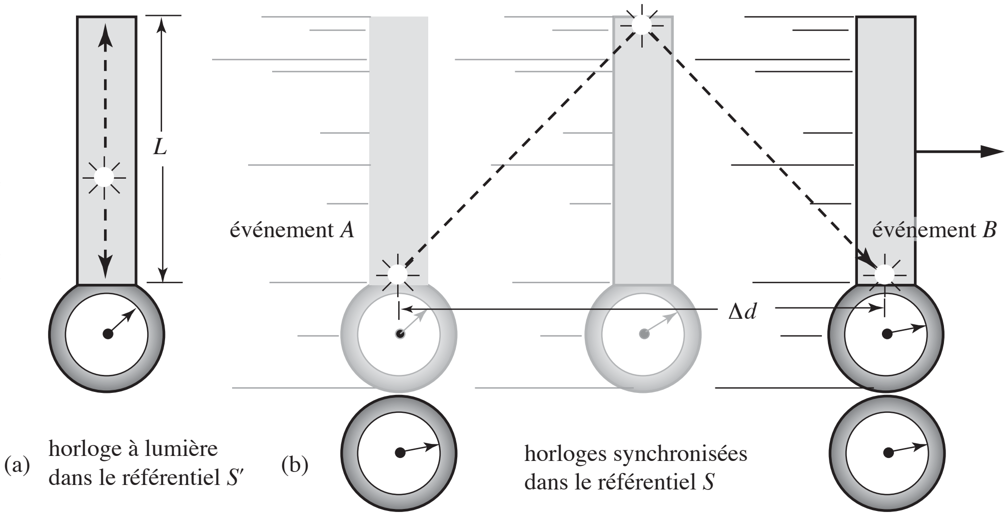

Fig. 2.5 – (a) Une horloge à lumière vue depuis son référentiel au repos S'. (b) La même horloge (avec le trajet en zigzag de la lumière) vue depuis le référentiel S dans lequel l'horloge se déplace à la vitesse β.

Une **horloge à lumière** est un type d'horloge qui utilise des éclairs lumineux se réfléchissant entre deux miroirs pour mesurer le passage du temps (voir la figure 2.5a). Comme la vitesse de la lumière est égale à 1 dans le référentiel de l'horloge, celle-ci fonctionne correctement si elle indique une augmentation de $2L$ après chaque aller-retour de la lumière, où L désigne la distance entre les miroirs.

Imaginez maintenant que cette horloge (avec tout le référentiel S') se déplace à la vitesse β par rapport à un référentiel S, comme l'illustre la figure 2.5b. Soit A et B les événements successifs correspondant au moment où la lumière atteint le miroir du bas. Pendant le temps Δt mesuré dans S, l'horloge parcourt une distance $\Delta d = \beta \Delta t$. Comme la vitesse de la lumière vaut aussi 1 dans le référentiel S, Δt doit être le temps mis par la lumière pour parcourir la trajectoire en zigzag montrée sur la figure 2.5b, ce temps étant directement donné en mètres par la distance parcourue. D'après le théorème de Pythagore, cette distance s'écrit simplement

$$\Delta t = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{1}{2}\Delta d\right)^2} = \sqrt{(2L)^2 + \Delta d^2} = \sqrt{(\Delta t')^2 + \Delta d^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t'^2 = \Delta t^2 - \Delta d^2 = \Delta t^2 - (\beta \Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2} \tag{2.11}$$

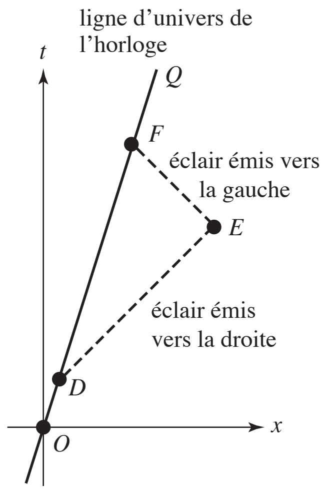

Fig. 2.6 – Diagramme d'espace-temps montrant un événement arbitraire E et les éclairs lumineux reliant cet événement à la ligne d'Univers de l'horloge Q.

Transformation de Lorentz inverse. Considérons maintenant le diagramme d'espace-temps montré sur la figure 2.6. La ligne d'univers qui joint l'événement O à l'événement F est celle que suit une horloge Q au repos en $x' = 0$ dans le référentiel S' : l'événement O est défini par $t = 0$ et $x = 0$ dans les deux référentiels. E est un événement arbitraire et les lignes pointillées sont les lignes d'univers de deux éclairs lumineux (qui n'ont rien à voir avec l'éclair montré dans la figure 2.5) : un des éclairs est émis vers la droite par l'horloge Q à l'événement D pour aller vers E, l'autre est émis vers la gauche depuis E, pour retourner à l'horloge à l'événement F.

L'horloge Q est située en $x' = 0$ par définition, et les événements D et F se produisent en $x'_D = x'_F = 0$ dans le référentiel S'. Comme l'horloge Q se déplace (en même temps que S') à la vitesse β dans la direction $+x$ dans S, en démarrant en $x = 0$ à $t = 0$, on a $x_D = \beta t_D$ et $x_F = \beta t_F$. Finalement, puisque l'horloge Q est présente aux événements O et D, on peut appliquer l'équation 2.11 et on sait donc que $t'_D = t_D\sqrt{1-\beta^2}$, ce qui implique que $t_D = \gamma t'_D$ où $\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}$. De même, $t_F = \gamma t'_F$. Finalement,